CLASS Bologna

Analisi Matematica @ Class

Numeri Reali

Lezione 5

30 settembre 2014

professor Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

(f) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$

(f) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$

(g) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(f) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=n+1$

(g) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(h) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)=\frac{n(n^2-1)}{3}$

(f) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$

(g) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(h) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1} + 3$

(f) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$

(g) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(h) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1}+3$

(l) Se $a,\ b \in \mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $a^n - b^n$ è divisibile per $a-b$

(f) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1$

(g) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(h) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}$

(i) per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)3^k = (n-1)3^{n+1}+3$

(l) Se a, $b \in \mathbb{Z}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ il numero $a^n - b^n$ è divisibile per $a-b$

(m) per ogni $n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ è divisibile per 6

Fattoriale di un numero naturale Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il fattoriale di n, $n!$ si definisce induttivamente come:

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ n! = n \times (n-1)!, \text{ se } n \geq 1. \end{cases} \tag{F}$$

Fattoriale di un numero naturale Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il fattoriale di n, $n!$ si definisce induttivamente come:

$$\begin{cases} 0! = 1, \\ n! = n \times (n-1)!, \text{ se } n \geq 1. \end{cases} \tag{F}$$

Il fattoriale di n è il prodotto di n per tutti gli interi che lo precedono:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il semifattoriale di n, $n!!$ si definisce induttivamente come:

$$\begin{cases} 0!! = 1, \\ 1!! = 1, \\ n!! = n \times (n-2)!!, \text{ se } n \geq 2. \end{cases} \tag{S}$$

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il semifattoriale di n, $n!!$ si definisce induttivamente come:

$$\begin{cases} 0!! = 1, \\ 1!! = 1, \\ n!! = n \times (n-2)!!, \text{ se } n \geq 2. \end{cases} \tag{S}$$

Ad esempio $6!! = 2 \times 4 \times 6 = 48$, $7!! = 3 \times 5 \times 7 = 105$.

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Il semifattoriale di n, $n!!$ si definisce induttivamente come:

$$\begin{cases} 0!! = 1, \\ 1!! = 1, \\ n!! = n \times (n-2)!!, \text{ se } n \geq 2. \end{cases} \tag{S}$$

Ad esempio $6!! = 2 \times 4 \times 6 = 48$, $7!! = 3 \times 5 \times 7 = 105$.

Valgono le identità:

$$n! = n!!\,(n-1)!!, \quad (2n)!! = 2^n\, n!, \quad (2n+1)!! = \frac{(2n+1)!}{2^n\, n!},$$

che possono essere provate usando l'induzione.

Coefficienti binomiali

Se n, $m \in \mathbb{N}$ il coefficiente binomiale n *su* m è:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{se } n \geq m, \\ 0 & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Coefficienti binomiali

Se n, $m \in \mathbb{N}$ il coefficiente binomiale *n su m* è:

$$\binom{n}{m} = \begin{cases} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} & \text{se } n \geq m, \\ 0 & \text{se } n < m. \end{cases}$$

Se $m \leq n$:

$$\binom{n}{m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-m+1)}{m!}.$$

Proprietà dei coefficienti binomiali

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1,$$

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}, \qquad \binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1},$$

$$\binom{n}{m} = \sum_{k=1}^{n-m+1} \binom{n-k}{m-1}, \qquad \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

Teorema Se A, $B \in \mathbb{R}$ e se $n \in \mathbb{N}$ allora:

$$(A+B)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^{n-m} B^m.$$

Teorema Se A, $B \in \mathbb{R}$ e se $n \in \mathbb{N}$ allora:

$$(A+B)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^{n-m} B^m.$$

Se $n = 2, 3$ abbiamo formule per il quadrato e per il cubo di un binomio:

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2, \\ (A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3. \end{aligned}$$

Teorema Se A, $B \in \mathbb{R}$ e se $n \in \mathbb{N}$ allora:

$$(A+B)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} A^{n-m} B^m.$$

Se $n = 2, 3$ abbiamo formule per il quadrato e per il cubo di un binomio:

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2,\\ (A+B)^3 &= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.\end{aligned}$$

Caso particolare importante è quello in cui $a = b = 1$:

$$2^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}. \tag{St}$$

La formula (St) è nota come teorema di Stifel

Disuguaglianze

Teorema (Disuguaglianze Triangolari)

Se x, $y \in \mathbb{R}$ allora

(i) $|x+y| \leq |x| + |y|$

(ii) $||x| - |y|| \leq |x-y|$